20. Solução particular da EDO linear com coe

Seja uma equação linear

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{20.1}$$

ALGORITMO:

1. Solução geral da (20.1) tem forma $y = y_h + y_p$, onde y_h é solução geral da

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{20.2}$$

   e y_p é solução particular da (20.1).
2. $y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, onde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é conjunto fundamental para (20.2).
3. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ está gerado pelas raízes do polinômio característico da (20.2)

$$P_n(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0.$$

4. $y_p =$? Abaixo nós vamos discutir como achar y_p nos casos particulares.

Procuremos y_p nos 3 casos particulares:

Caso I. Suponha que $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Procuremos y_p na forma

$$y_p = r^m (B_n \cdot x^n + \cdots + B_1 \cdot x + B_0),$$

onde m é multiplicidade de raiz $r = 0$ do $P_n(r)$ (se $r = 0$ não for raiz de $P_n(r)$ assume-se que $m = 0$!)

■ **Exemplo 20.1** Resolva

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = x + 1 \tag{20.3}$$

Solução. A solução geral tem forma $y = y_h + y_p$.

a) Procuremos y_h.

Lembra que $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3b^2 a - b^3$. Logo

$$P_3(r) = r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3 = 0,$$

assim $r=2$ é raiz da multiplicidade 3. Temos que $\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$ é conjunto fundamental portanto

$$y_h = e^{2x}(c_1 + c_2x + c_3x^2), \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Procuremos y_p na forma $y_p = B_1 \cdot x + B_0$ (pois $r=0$ não é raiz do $P_3(r)$), assim $y_p' = B_1$, $y_p'' = y_p''' = 0$. Então (20.3) implica que

$$0 - 6\cdot 0 + 12B_1 - 8B_1x - 8B_0 = x + 1.$$

Logo (comparando os coeficientes de x^1 e x^0 dos polinômios do lado direito e lado esquerdo)

$$\begin{cases} -8B_1 = 1; \\ 12B_1 - 8B_0 = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 = -\dfrac{1}{8}; \\ -\dfrac{12}{8} - 8B_0 = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 = -\dfrac{1}{8}; \\ B_0 = -\dfrac{5}{16}. \end{cases}$$

Assim, $y_p = -\frac{1}{8}x - \frac{5}{16}$ e

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) - \frac{1}{8}x - \frac{5}{16}$$

é solução geral. ;-)

■ **Exemplo 20.2** Resolva

$$y'' + 2y' = x^2 + 2. \tag{20.4}$$

Solução. A solução geral tem forma $y = y_h + y_p$.

a) Procuremos y_h. Equação característica é $R_2(r) = r^2 + 2r = 0$, assim $r_1 = 0$ e $r_2 = -2$, portanto $\{1, e^{-2x}\}$ é conjunto fundamental e

$$y_h = c_1 + c_2e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Agora procuremos y_p na forma $y_p = (B_2x^2 + B_1x + B_0)x$ (pois $r=0$ é raiz!). Assim $y_p' = 3B_2x^2 + 2B_1x + B_0$ e $y_p'' = 6B_2x + 2B_1$. Agora (20.4) implica que

$$6B_2x + 2B_1 + 6B_2x^2 + 4B_1x + 2B_0 = x^2 + 2.$$

Temos

$$\begin{cases} 6B_2 = 1; \\ 6B_2 + 4B_1 = 0; \\ 2B_1 + 2B_0 = 2; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_2 = \dfrac{1}{6}; \\ 1 + 4B_1 = 0; \\ B_1 + B_0 = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_2 = -\dfrac{1}{6}; \\ B_1 = -\dfrac{1}{4}; \\ B_0 = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Resumindo $y_p = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x$ e solução geral é

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x.$$

;-)

Caso II. Suponha agora que

$$g(x) = (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)e^{ax}.$$

Procuremos y_p na forma

$$y_p = (B_n \cdot x^n + \cdots + B_1 x + B_0) \cdot x^m \cdot e^{ax},$$

onde m é multiplicidade de raiz $r = a$ (caso existir!).

■ **Exemplo 20.3** Resolva

$$y'' - y' - 2y = xe^{2x} \tag{20.5}$$

Solução. $y = y_h + y_p$

a) $y_h = ?$

Equação característica é $P_2(r) = r^2 - r - 2 = 0$, assim $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, portanto $\{e^{2x}, e^{-x}\}$ é conjunto fundamental e

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $y_p = ?$

Seja $y_p = (B_1 x + B_0) \cdot x \cdot e^{2x} = (B_1 x^2 + B_0 x)e^{2x}$, assim

$$y_p' = 2e^{2x}(B_1 x^2 + B_0 x) + e^{2x}(2B_1 x + B_0) = e^{2x}(2B_1 x^2 + (2B_0 + 2B_1)x + B_0)$$
$$y_p'' = e^{2x}(4B_1 x^2 + (4B_0 + 8B_1)x + 4B_0 + 2B_1).$$

Portanto (20.5) implica

$$e^{2x}(4B_1x^2 + (4B_0 + 8B_1)x + 3B_0 + 2B_1) - e^{2x}(2B_1x^2 + (2B_0 + 2B_1)x + B_0) - 2e^{2x}(B_1x^2 + B_0x) = xe^{2x}$$

e

$$\begin{cases} 4B_0 + 8B_1 - 2B_0 - 2B_1 - 2B_0 = 1; \\ 4B_0 + 2B_1 - B_0 = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{6}; \\ B_0 = 1 = -\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Resumindo $y_p = e^{2x}(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x)$ e solução geral é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{2x}(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x).$$

;-)

Caso III. Suponha que $g(x) = (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)e^{ax}\cos bx$ (ou $g(x) = (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx$. Procuremos y_p na forma:

$$y_p = (B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0)x^m a^{ax}\cos(bx) + (C_n x^n + \cdots + C_1 x + C_0)x^m e^{ax}\cos(bx),$$

onde m é multiplicidade da raiz $r = a + ib$ do $P_n(r)$ (caso existir!!).

■ **Exemplo 20.4** Resolva

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x \tag{20.6}$$

Solução. Neste caso $a = 1$ e $b = 1$. Solução geral é $y = y_h + y_p$.

a) $y_h =$? Temos $P_2(r) = r^2 + 2r + 2 = 0$, logo

$$(r^2 + 2r + 1) + 1 = 0, \Longrightarrow (r+1)^2 = -1, \Longrightarrow r + 1 = \pm i, \Longrightarrow r = -1 \pm i,$$

portanto $\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\operatorname{sen} x\}$ é conjunto fundamental e

$$y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $y_p =$? Seja $y_p = B_0 e^x \cos x + C_0 e^x \operatorname{sen} x$, assim

$$\begin{aligned} y_p' &= B_0 e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + C_0 e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = (B_0 + C_0)e^x \cos x + (C_0 - B_0)e^x \operatorname{sen} x, \\ y_p'' &= 2C_0 e^x \cos x - 2B_0 e^x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Agora (20.6) implica que

$$2C_0 e^x \cos x - 2B_0 e^x \operatorname{sen} x + 2((B_0 + C_0)e^x \cos x + (C_0 - B_0)e^x \operatorname{sen} x) + 2(B_0 e^x \cos x + C_0 e^x \operatorname{sen} x) = e^x \cos x,$$

ou seja

$$4(B_0 + C_0)e^x \cos x + 4(C_0 - B_0)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x,$$

portanto

$$\begin{cases} 4B_0 + 4C_0 = 1; \\ -4B_0 + 4C_0 = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{1}{8}; \\ C_0 = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Temos que $y_p = \frac{1}{8}e^x \cos x + \frac{1}{8}e^x \operatorname{sen} x$, e solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\operatorname{sen} x + \frac{1}{8}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

;-)

20.1 Princípio de Superposição:

Se $y_{p,1}$ e $y_{p,2}$ forem soluções particulares de

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0 y = g_1(x),$$

e

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0 y = g_2(x),$$

respectivamente, assim $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ é solução particular para

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0 y = g_1(x) + g_2(x).$$

■ **Exemplo 20.5** Resolve
$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x + 1 + x^2.$$

Solução. Seja $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, onde $g_1(x) = e^x \cos x$ e $g_2(x) = 1 + x^2$. Do exemplo anterior temos que
$$y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$$
e $y_{p,1} = \dfrac{1}{8} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$ é solução particular para
$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x = g_1(x).$$

Procuremos solução $y_{p,2}$ para
$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x^2 = g_2(x),$$
na forma $y_{p,2} = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$, portanto
$$y'_{p,2} = 2B_2 x + B_1,$$
$$y''_{p,2} = 2B_2,$$
e
$$2B_2 + 4B_2 x + 2B_1 + 2B_2 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 = 1 + x^2.$$

Neste caso temos
$$\begin{cases} 2B_2 = 1; \\ 4B_2 + 2B_1 = 0; \\ 2B_2 + 2B_1 + 2B_0 = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_2 = \dfrac{1}{2}; \\ 2 + 2B_1 = 0; \\ 4 + 2B_1 + 2B_0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_2 = -\dfrac{1}{2}; \\ B_1 = -1; \\ B_0 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

e $y_{p,2} = \dfrac{1}{2} x^2 - x - \dfrac{1}{2}$. Como
$$y_p = y_{p,1} + y_{p,2} = \frac{1}{8} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} x^2 - x - \frac{1}{2},$$
então a solução geral é
$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{8} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} x^2 - x - \frac{1}{2}.$$

;-)